L 3, An	Construction de l'exponentielle	L 102 L 204 L 228 L 230 L 243

Th : ① $\forall z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ CVA. On pose $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

② $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\exp(a) \times \exp(b) = \exp(a+b)$.

③ $\exp \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp'(z) = \exp(z)$.

④ $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective et ouverte.

⑤ $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ réalise une bijection strictement croissante.

⑥ $\exp : i\mathbb{R} \to \mathbb{U}$ est un morphisme de groupes surjectif ouvert.

⑦ $\exists !\, \pi > 0$ tq $\mathrm{Ker}(\exp) = 2i\pi\mathbb{Z}$. Par suite : $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{U}$.

⑧ $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ est un nombre irrationnel.

Démonstration : ① Si $z = 0$, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{0^n}{n!}$ CVA et $\exp(0) = 1$.
Si $z \neq 0$, on a : $\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{z^n} \right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. D'après D'Alembert, $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ CVA.

② Soient $a, b \in \mathbb{C}$, par produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes,

$$\exp(a) \times \exp(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \exp(a+b)$$

En particulier, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \times \exp(-z) = \exp(0) = 1$ donc $\exp(z) \neq 0$ et $(\exp(z))^{-1} = \exp(-z)$
Et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exp(nz) = (\exp(z))^n$. On pose $e = \exp(1)$. On note $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^z$.

③ Soit $z \in \mathbb{C}$, on a $\forall h \in \mathbb{D}(0,1) \setminus \{0\}$,

$$\left| \frac{e^{z+h} - e^z}{h} - e^z \right| = \frac{|e^z|}{|h|} |e^h - 1 - h| = \frac{|e^z|}{|h|} \cdot \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \right| \leq |e^z| . |h| . \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \to 0$$

Ainsi, $\exp$ est holomorphe en z et $\exp'(z) = \exp(z)$: $\exp \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

④ Mq $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est ouverte. Soit U ouvert de $\mathbb{C}$ et $V = \exp(U)$.
Soit $b \in V = \exp(U)$: $\exists\, a \in U$ tq $b = e^a$. Comme $\exp'(a) = e^a \neq 0$, d'après le TIL,
$\exists\, \mathcal{U}$ voisinage ouvert de a, $\exists\, \mathcal{V}$ voisinage ouvert de b tq $\exp : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ C^1-difféo.
Soit $\ell_a : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ sa bijection réciproque. ℓ_a continue et $\ell_a(b) = a$.
Par hypothèses, $U \cap \mathcal{U}$ voisinage ouvert de a donc $\ell_a^{-1}(U \cap \mathcal{U})$ voisinage ouvert de b.
Ainsi V est ouvert puis l'application $\exp$ est ouverte.

(4) Mq $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective. Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Mq $\exists\, \gamma \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{C}^*)$ tq $\gamma(0) = 1$, $\gamma(1) = w$

• Si $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, on pose $\gamma(t) = 1 - t + tw$. Si $w \in \mathbb{R}^*_-$, on pose $\gamma(t) = 1 - t + tw + ia\,t(1-t)$

On construit un bout de logarithme : $\ell : [0,1] \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \int_0^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt$

et on considère $f : x \mapsto \gamma(x)\, e^{-\ell(x)}$.

f dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $f'(x) = \left(\gamma'(x) - \gamma(x) \cdot \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)}\right) e^{-\ell(x)} = 0$: f cste sur $[0,1]$

Comme $f(0) = 1$, on a $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 1 \iff \gamma(x) = e^{\ell(x)}$.

En particulier, $w = \gamma(1) = e^{\ell(1)} \in \mathrm{Im}(\exp)$.

(5) On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \in \mathbb{R}$ comme somme de réels. Par suite, $e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0$.

Ainsi, exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective, et continue.

Comme $\forall x \geq 0$, $e^x \geq 1 + x$, on a $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = +\infty$ plus $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0^+$.

D'après le TVI, exp est surjective dans $]0; +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{R}^*_+$. On note ln sa bijection réciproque.

(6) Soit $z \in i\mathbb{R}$: $\exists\, y \in \mathbb{R}$ tq $z = iy$, alors $|e^z| = e^{iy} \cdot \overline{e^{iy}} = e^{iy} \cdot e^{-iy} = e^0 = 1$: $z \in \mathbb{U}$.

Par restriction, $\exp : i\mathbb{R} \to \mathbb{U}$ morphisme de groupes, continu.

Soit $w \in \mathbb{U}$: $\exists\, z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ tq $w = e^z$, alors $1 = |w| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| \cdot 1 = e^x \iff x = \ln 1 = 0$

d'où $z = iy \in i\mathbb{R}$ vérifie $w = e^z$, ainsi $\exp : i\mathbb{R} \to \mathbb{U}$ surjective.

Soit U ouvert de $i\mathbb{R}$. U est de la forme $U' \cap i\mathbb{R}$ avec U' ouvert de $\mathbb{C}$.

D'après le pt 4, $V' = \exp(U')$ ouvert de $\mathbb{C}$ d'où $\exp(U) = V' \cap \mathbb{U}$ ouvert de $\mathbb{U}$.

(7) Soit $z \in \mathrm{Ker}(\exp)$: $e^z = 1 \Rightarrow |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} = 1 \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Rightarrow z \in i\mathbb{R}$ d'où $\mathrm{Ker}(\exp) \subset i\mathbb{R}$

On considère alors $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $z \mapsto e^{iz}$ morphisme de gpes continu, surjectif ouvert.

alors $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un s/s gpe de $\mathbb{R}$, fermé car φ continue.

Si $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathbb{R}$ alors $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ n'est pas surjective ↯, donc $\exists!\, a \in \mathbb{R}^+$ tq $\mathrm{Ker}\,\varphi = a\mathbb{Z}$.

Si $a = 0$, alors φ injective donc bijective. Comme φ ouverte, on a φ^{-1} continue

Par suite, $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $\mathbb{U}$ ↯ (par compacité) donc $a > 0$.

On pose $\pi = \frac{a}{2} > 0$ de sorte que $\mathrm{Ker}(\varphi) = 2\pi\mathbb{Z} \iff \mathrm{Ker}(\exp) = 2i\pi\mathbb{Z}$.

De plus, d'après le th d'isomorphisme pour φ, $\mathbb{T} := \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{U}$

(8) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!}$.

On mq : $(u_n) \nearrow$, $(v_n) \searrow$ et $\lim\limits_{n \to \infty} v_n - u_n = 0$: (u_n) et (v_n) st adjacentes

D'après le th des suites monotones, comme la limite commune est e ; $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < e < v_n$

Supposons $e \in \mathbb{Q}$: $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $p \wedge q = 1$, $e = \frac{p}{q}$,

alors $\sum\limits_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum\limits_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q \cdot q!}$ puis $\underbrace{q \cdot \sum\limits_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}}_{\in \mathbb{Z}} < \underbrace{p\, q!}_{\in \mathbb{Z}} < \underbrace{q \sum\limits_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}}_{\in \mathbb{Z}} + 1$ ↯